

*Claudio De Angelis*

# Fondamenti *di* Logica

QUADERNO n. 1

**Analitic@Mente**

Collana di Analisi Matematica

*[www.csmedea.it](http://www.csmedea.it)*



*Claudio De Angelis*

**Fondamenti**  
*di*  
**Logica**

QUADERNO n. 1

**Analitic@Mente**

Collana di Analisi Matematica

*www.csmedea.it*



Quest'opera è stata rilasciata sotto la **licenza Creative Commons:**

*Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 2.5 (ITALIA).*

Per leggere una copia della licenza visita il sito web

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/legalcode>

o spedisci una lettera a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Tu sei libero:

- di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera
- di modificare quest'opera

alle seguenti condizioni:

- *Attribuzione* — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.
- *Non commerciale* — Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.
- *Condividi allo stesso modo* — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

**Nota** — Ogni volta che usi o distribuisi quest'opera, devi farlo secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.

**Collana di Analisi Matematica:** Analitic@Mente (a cura del Centro Studi Medea)

**Quaderno:** n. 1

**Titolo:** Fondamenti di Logica

**Versione:** 2.0 del 23 Novembre 2012

**Autore:** Claudio De Angelis

**Correttore:** Maria Laura Medugno

*Per commenti e/o suggerimenti scrivi a*

[info@csmedea.it](mailto:info@csmedea.it) oppure a Centro Studi Medea  
Via G. Citarella, 24  
84014 Nocera Inferiore (SA)  
Italia

**N. B.** *Accanto alle formule non si è potuto tenere un corretto uso della spaziatura in relazione alla punteggiatura.*

A Voi.

Il buio...  
D'un tratto  
tre stelle  
mi ridanno  
la luce.  
Rivedo.  
Rivivo.



## INDICE

	Prefazione.....	pag. I
<b>1.1</b>	Logica deduttiva ed induttiva.....	pag. 1
<b>1.2</b>	Proposizioni elementari o atomiche.....	pag. 2
<b>1.3</b>	Operazioni tra proposizioni: i connettivi.....	pag. 3
<b>1.4</b>	Precedenza dei connettivi ed uso delle parentesi.....	pag. 19
<b>1.5</b>	Forme proposizionali.....	pag. 20
<b>1.6</b>	Tautologie e contraddizioni.....	pag. 21
<b>1.7</b>	Forme proposizionali equivalenti (o equiveridiche).....	pag. 22
<b>1.8</b>	Connettivi <i>n-ari</i> .....	pag. 24
<b>1.9</b>	Algebra booleana.....	pag. 26
	<b>1.9.1</b> Riduzione delle forme proposizionali.....	pag. 28
	<b>1.9.2</b> Principio di dualità.....	pag. 29
	<b>1.9.3</b> Porte e reti logiche.....	pag. 31
<b>1.10</b>	Figure di ragionamento o regole deduttive.....	pag. 32
<b>1.11</b>	Fallacie o regole deduttive non valide.....	pag. 40
<b>1.12</b>	Implicazione logica e teorema.....	pag. 43
<b>1.13</b>	Differenza tra implicazione logica e materiale.....	pag. 45
<b>1.14</b>	Doppia implicazione logica o equivalenza logica.....	pag. 46
<b>1.15</b>	Condizione necessaria e condizione sufficiente.....	pag. 48
<b>1.16</b>	Quantificatori.....	pag. 49
	<b>1.16.1</b> Proprietà dei quantificatori.....	pag. 55
<b>1.17</b>	Principio di induzione matematica.....	pag. 57
	Indice analitico.....	pag. 65





## ***Prefazione***

*Questo testo è il primo di una collana interamente dedicata all'Analisi matematica, dal titolo dualistico e rappresentativo **Analitic@Mente**. La caratteristica essenziale di tale collana si ritrova nella modalità di pubblicazione. Essa è completamente pubblicata con una licenza CC (Creative Commons) per il diritto d'autore, al fine di condividerla in maniera ampia, secondo il nuovo modello di "Alcuni diritti riservati" e non secondo il più diffuso modello di "Tutti i diritti riservati".*

*L'intento di questo primo quaderno, intitolato "Fondamenti di Logica", è l'esemplificazione di concetti logico-matematici che in una fase embrionale di studio possono apparire alquanto ermetici, ma che scritti nella giusta chiave riescono a rivelarsi completamente al lettore. È proprio il lettore che ha guidato la stesura di questo lavoro ed è proprio per lui che una grande attenzione è stata posta nell'esposizione elementare di concetti e teoremi, non tralasciando esempi, curiosità, note ed approfondimenti che meglio chiariscono ogni lecito dubbio che una definizione o un teorema possono generare.*

*Tale lavoro, come lo stesso titolo evidenzia, non vuole esaurire completamente la conoscenza dell'argomento, ma solo fornire quelle nozioni necessarie allo studio universitario di qualunque disciplina postulatoria che fonda i suoi temi predominanti sulla Matematica e*

*sulla Logica. L'essenza di questo quaderno, pertanto, è nell'ausilio che può offrire ad uno studente che si appresta ad affrontare studi accademici di natura scientifica.*

*Con la consapevolezza che la conoscenza è rivolta a coloro che ne sono affascinati e con l'impegno di continuare a scrivere per TUTTI, auguro una buona lettura.*

*Nocera Inferiore,*

*20 Dicembre 2010*

*(vers. 2.0, 23 Novembre 2012).*

*Claudio*

*De Angelis*

# Fondamenti di Logica

## 1.1 LOGICA DEDUTTIVA ED INDUTTIVA

La *Logica* è una disciplina che si colloca tra la matematica e la filosofia. È lo studio del ragionamento e dell'argomentazione, volto a verificare la validità dei procedimenti del pensiero. In altri termini, il suo scopo è studiare le leggi del pensiero mediante procedimenti rigorosi.

È possibile distinguere, inizialmente, due forme di logica: *deduttiva* e *induttiva*.

La *logica deduttiva* è basata sulla supposizione di alcune *ipotesi* o *premesse* che costituiscono regole generali e da cui si deducono *tesi* o *conclusioni* mediante un ragionamento rigoroso, la cosiddetta *dimostrazione*. Alla base della logica deduttiva vi è il *teorema*, ossia un enunciato, costituito da ipotesi e tesi, che contiene una verità da dimostrare. Tralasciando la definizione rigorosa, è possibile affermare che la logica deduttiva ricava casi particolari da leggi generali.

La *logica induttiva*, viceversa, ha lo scopo di ricavare leggi generali dall'osservazione di particolari fenomeni sperimentali. È molto usata in Fisica, Chimica e, più in generale, nelle discipline scientifiche.

## 1.2 PROPOSIZIONI ELEMENTARI O ATOMICHE

**Definizione di proposizione elementare o atomica.** Si dice *proposizione elementare o atomica* una sequenza di termini che ha un senso compiuto e che è caratterizzata dall'essere o vera o falsa.

- **Nota**

Non sono *proposizioni logiche* le domande, le esclamazioni, i giudizi soggettivi e le frasi prive di senso compiuto, poiché a frasi di questo tipo non è possibile attribuire alcun valore di verità (*vero* o *falso*).

- **Esempi**

1) L'Italia è una penisola (*vero*).

2) L'Italia è un'isola (*falso*).

3) Che ora è? (*domanda, non è una proposizione logica*).

4) Che brutta maglia! (*giudizio soggettivo, non è una proposizione logica*).

5) L'armadio ha due divani! (*frase priva di senso compiuto, non è una proposizione logica*).

La logica è fondata essenzialmente su tre principi del pensiero aristotelico:

1. *Principio di identità*: ciascun oggetto del pensiero logico è identico a se stesso e a nessun altro.
2. *Principio di non contraddizione*: una proposizione

elementare non può essere contemporaneamente *vera* e *falsa*.

3. *Principio del terzo escluso*: se una proposizione  $p$  è *vera*, la sua negazione (*not p*) è *falsa*, e viceversa. In altre parole, non esiste un terzo valore di verità: una proposizione può essere esclusivamente o *vera* o *falsa*.

- **Esempi**

- 1) La penna è identica alla penna (*vero*). La penna è identica al tavolo (*falso*).
- 2) L'Italia è una penisola e non è una penisola (*contraddizione*).
- 3) Sia  $p$  : "L'Italia è una penisola" (*vero*), si ha *not p* : "L'Italia non è una penisola" (*falso*).
- 4) Sia  $p$  : "L'Italia è un'isola" (*falso*), si ha *not p* : "L'Italia non è un'isola" (*vero*).

### 1.3 OPERAZIONI TRA PROPOSIZIONI: I CONNETTIVI

In ogni linguaggio le proposizioni possono essere relazionate per formare espressioni più complesse mediante alcuni termini come *e*, *o*, *non*, *se...allora*,... Anche le *proposizioni elementari* possono essere negate o collegate tra loro mediante i cosiddetti *connettivi*, di vario tipo:

- *connettivi unari*: riferiti ad una sola proposizione;
- *connettivi binari*: che legano due proposizioni;
- *connettivi n-ari*: che legano  $n$  proposizioni.

Esistono alcuni connettivi, detti *fondamentali*, che fungono da base per la costruzione di altri connettivi, definiti *derivati*.

Si elenchino, ora, i vari connettivi che si tratteranno:

Connettivi fondamentali	Simbolo	Tipo
negazione, not	$\neg \square$ o $\bar{\square}$ , <i>not</i>	unario
congiunzione, and	$\square \wedge \square$ , <i>and</i>	binario
disgiunzione inclusiva, or	$\square \vee \square$ , <i>or</i>	binario

Connettivi derivati	Simbolo	Tipo
disgiunzione esclusiva, xor	$\square \dot{\vee} \square$ , <i>xor</i>	binario
implicazione materiale	$\square \rightarrow \square$ , <i>se...allora</i>	binario
doppia implicazione materiale, xnor	$\square \leftrightarrow \square$ , <i>se e solo se, xnor</i>	binario
nor	$\square \downarrow \square$ , <i>nor</i>	binario
nand	$\square \uparrow \square$ , <i>nand</i>	binario

Come si può evincere dalla tabella, si tratteranno in questo paragrafo solo connettivi unari e binari, lasciando lo studio dei connettivi *n-ari* ad un paragrafo successivo.

- **Approfondimento**

I connettivi sono delle *funzioni booleane*  $f$ , definite da un prodotto cartesiano di un insieme binario moltiplicato  $n$  volte per se stesso verso lo stesso insieme binario. In simboli:

$$f : \{0; 1\}^n \rightarrow \{0; 1\}, \text{ con } n \text{ numero naturale.}$$

Se  $n=1$  il connettivo è unario, se  $n=2$  il connettivo è binario, altrimenti il connettivo è *n-ario*.

Si consideri un connettivo unario ( $n=1$ ) riferito ad una proposizione  $A$ . Gli elementi della funzione  $f$  sono 4, precisamente:

$(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ . Si riportino tali elementi in una tabella e si faccia corrispondere al valore 0 il valore F (*falso*) e al valore 1 il valore V (*vero*), si ottiene:

$A$	1	2	3	4
V	F	F	V	V
F	F	V	F	V

Una tabella siffatta chiarisce che esistono quattro possibili connettivi unari (denotati con 1, 2, 3, 4) riferiti ad una stessa proposizione  $A$ . Si studierà soltanto il connettivo unario 2, al quale si darà il nome di *negazione*.

Si consideri, ora, un connettivo binario ( $n=2$ ) riferito alle proposizioni  $A$  e  $B$ . Gli elementi della funzione  $f$  sono in numero di 16 e la relativa tabella è la seguente:

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Dei sedici connettivi binari possibili si studieranno solo sette casi:

il connettivo 8, che si chiamerà *coniunzione*;

il connettivo 2, che si chiamerà *disgiunzione inclusiva*;

il connettivo 10, che si chiamerà *disgiunzione esclusiva*;

il connettivo 5, che si chiamerà *implicazione materiale*;

il connettivo 7, che si chiamerà *coimplicazione*;

il connettivo 15, che si chiamerà *negazione della disgiunzione inclusiva*;

il connettivo 9, che si chiamerà *negazione della congiunzione*.

### Negazione (*Not*).

La *negazione* è un connettivo fondamentale unario che fornisce il valore *falso* se la proposizione è *vera*, al contrario fornisce il valore *vero* se la proposizione è *falsa*.

Sia  $p$  una proposizione; la negazione di  $p$  si indica con:

$$\neg p \text{ oppure } \bar{p}$$

(si legge: *not p* ).



- **Esempio**

Sia  $p$  : "L'Italia è una penisola",  $\bar{p}$  : "L'Italia non è una penisola".

Tavola di verità della negazione (*not*):

$p$	$\bar{p}$
V	F
F	V

- **Nota**

Negando una proposizione negata si giunge alla sua affermazione (una doppia negazione afferma).

In simboli:  $\overline{\bar{p}} = p$ .

Generalizzando: negare un numero pari di volte una proposizione equivale ad affermarla; viceversa, negare un numero dispari di volte una proposizione equivale a negarla.

### **Congiunzione (*And*).**

La congiunzione è un connettivo fondamentale binario che fornisce il valore *vero* solo se entrambe le proposizioni sono *vere*, mentre fornisce il valore *falso* negli altri casi.

Siano  $p$  e  $s$  due proposizioni, la congiunzione di  $p$  e  $s$  si indica con:

$$p \wedge s$$

(si legge:  $p$  and  $s$ ).

In  $p \wedge s$  vale sia  $p$  sia  $s$ .

- **Esempio**

Siano  $p$  : "L'Italia è una penisola",  $s$  : "Cipro è un'isola", si ha

$p \wedge s$  : "L'Italia è una penisola e Cipro è un'isola".

Tavola di verità della congiunzione (*and*):

$p$	$s$	$p \wedge s$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **Proprietà**

Siano A, B, C tre proposizioni logiche. Utilizzando le tavole di verità è possibile verificare le seguenti proprietà.

*Proprietà dell'idempotenza:*  $A \wedge A = A$ .

*Proprietà associativa:*  $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ .

*Proprietà commutativa:*  $A \wedge B = B \wedge A$ .

### Disgiunzione inclusiva (*Or*).

La disgiunzione inclusiva è un connettivo fondamentale binario che fornisce il valore *false* solo se entrambe le proposizioni sono *false*, in tutti gli altri casi fornisce il valore *vero*.

Siano  $p$  e  $s$  due proposizioni, la disgiunzione inclusiva di  $p$  e  $s$  si indica con:

$$p \vee s$$

(si legge:  $p$  or  $s$ ).

In  $p \vee s$  o vale  $p$  o vale  $s$  o valgono entrambe.

- **Esempio**

Siano  $p$  : "L'Italia è una penisola",  $s$  : "Cipro è un'isola",  
 si ha  $p \vee s$  : "L'Italia è una penisola o Cipro è un'isola".

Tavola di verità della disgiunzione inclusiva (or):

$p$	$s$	$p \vee s$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Proprietà**

Siano  $A, B, C$  tre proposizioni logiche. Utilizzando le tavole di verità è possibile verificare le seguenti proprietà.

*Proprietà dell'idempotenza:*  $A \vee A = A$  .

*Proprietà associativa:*  $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$  .

*Proprietà commutativa:*  $A \vee B = B \vee A$  .

- **Nota**

In relazione alla *coniunzione* e alla *disgiunzione inclusiva* è possibile evidenziare la validità delle seguenti ulteriori proprietà:

*Proprietà dell'assorbimento:*  $A \vee (A \wedge B) = A$  ;

$$A \wedge (A \vee B) = A .$$

*Proprietà distributiva:*  $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$  ;

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) .$$

*Leggi di De Morgan:*  $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$  ;

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B} .$$

*Variazioni*

*delle leggi di De Morgan:*  $A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$  ;

$$A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} .$$

### **Disgiunzione esclusiva (*Xor*).**

La disgiunzione esclusiva è un connettivo derivato binario che fornisce il valore *falso* se entrambe le proposizioni hanno lo stesso valore di verità, altrimenti fornisce il valore *vero*.

Siano  $p$  e  $s$  due proposizioni, la disgiunzione esclusiva di  $p$  e  $s$  si indica con:

$$p \dot{\vee} s$$

(si legge:  $p$  *xor*  $s$ ).

In  $p \dot{\vee} s$  o vale  $p$  o vale  $s$ , non valgono entrambe.

- **Esempio**

Siano  $p$  : "Mangi una mela",  $s$  : "Bevi il latte", si ha

$p \dot{\vee} s$  : "O mangi una mela o bevi il latte".

- **Nota 1**

Il connettivo *or* (disgiunzione inclusiva) non è esclusivo. Nella connessione  $p \vee s$ , infatti, il verificarsi di  $p$  non esclude  $s$  e viceversa.

Si faccia un esempio:

Sia  $p$  : "Paolo canta" e  $s$  : "Paolo suona", si ha  $p \vee s$  : "Paolo canta o suona".

Tale connessione può assumere tre significati distinti:

- Paolo canta, ma non suona;
- Paolo suona, ma non canta;
- Paolo suona e canta contemporaneamente.

Si introduca, ora, il connettivo *xor* (disgiunzione esclusiva) relazionato allo stesso esempio  $p \dot{\vee} s$  : " Paolo o canta o suona".

Questa connessione può assumere solo due significati distinti:

- Paolo canta, ma non suona;
- Paolo suona, ma non canta.

- **Nota 2**

Si ricordi che *xor* sta per *eXclusive OR*.

- **Curiosità**

La distinzione fra *or* e *xor* era già presente nella lingua latina, infatti,

in Latino, si trova:

*aut...aut* per esprimere *xor* e *vel* per esprimere *or*. L'iniziale del termine *vel* ha spinto verso l'utilizzo del simbolo  $\vee$  per denotare il connettivo *or*.

Tavola di verità della disgiunzione esclusiva (*xor*):

$p$	$s$	$p \dot{\vee} s$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Proprietà**

Siano  $A, B, C$  tre proposizioni logiche. Utilizzando le tavole di verità è possibile verificare le seguenti proprietà.

*Proprietà associativa:*  $A \dot{\vee} (B \dot{\vee} C) = (A \dot{\vee} B) \dot{\vee} C$ .

*Proprietà commutativa:*  $A \dot{\vee} B = B \dot{\vee} A$ .

*Proprietà distributiva:*  $A \wedge (B \dot{\vee} C) = (A \wedge B) \dot{\vee} (A \wedge C)$ .

*Proprietà di derivazione:*  $A \dot{\vee} B = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})$ .

## Implicazione materiale.

L'implicazione materiale è un connettivo derivato binario che fornisce il valore *falso* solo se la prima proposizione è *vera* e la seconda è *falsa*, altrimenti fornisce il valore *vero*.

Siano  $p$  e  $s$  due proposizioni, l'implicazione materiale da  $p$  a

$s$  si denota con:

$$p \rightarrow s$$

(si legge:  $p$  implica  $s$  oppure *se  $p$  allora  $s$* ).

- **Esempio**

Siano  $p$  : "Il numero  $x$  è divisibile per 4",  $s$  : " $x$  è divisibile per 2", si ha

$p \rightarrow s$  : "Se il numero  $x$  è divisibile per 4, allora  $x$  è divisibile per 2".

Tavola di verità dell'implicazione materiale (*se...allora*):

$p$	$s$	$p \rightarrow s$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Nota 1**

Siano A, B e C tre proposizioni.

È importante sottolineare che la proposizione "Se A implica B e B implica C, allora A implica C" assume sempre valore *vero*, indipendentemente dai valori di verità assunti dalle singole proposizioni elementari. È possibile verificare tale constatazione mediante le tavole di verità.

- **Proprietà**

*Proprietà di derivazione:*  $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$ .

Inoltre:  $A \rightarrow B = \overline{A \wedge \bar{B}}$ .

- **Nota 2**

L'implicazione materiale non gode delle proprietà associativa e commutativa.

## **Doppia implicazione materiale o Equivalenza**

### **o Coimplicazione (*Xnor*).**

La *doppia implicazione materiale* (*equivalenza* o *coimplicazione* o *xnor*) è un connettivo derivato binario che fornisce il valore *vero* se le proposizioni hanno identico valore di verità, altrimenti fornisce il valore *falso*.

Siano  $p$  e  $s$  due proposizioni, la doppia implicazione materiale tra  $p$  e  $s$  si denota con:

$$p \leftrightarrow s$$

(si legge:  $p$  *equivale a*  $s$  oppure  $p$  *se e solo se*  $s$  oppure  $p$  *xnor*  $s$ ).



- **Esempio 1**

Siano  $p$  : "Il numero  $x$  è non minore di 4",  $s$  : "x è maggiore o uguale a 4", si ha

$p \leftrightarrow s$  : "Il numero  $x$  è non minore di 4 *se e solo se*  $x$  è maggiore o uguale a 4".

Tavola di verità della doppia implicazione materiale (*se e solo se*, *xnor*):

$p$	$s$	$p \leftrightarrow s$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- **Nota 1**

Nella *coimplicazione* non è necessaria l'esistenza di un legame consequenziale tra le proposizioni componenti, dovuto al loro specifico significato.

La proposizione  $p$  può, quindi, non avere alcuna relazione con  $s$  e l'equivalenza materiale  $p \leftrightarrow s$  può non avere alcun significato accettabile nel linguaggio comune.

- **Esempio 2**

Siano  $p$  : "3 è un divisore di 7" e  $s$  : "10 è multiplo di 3" due proposizioni palesemente *false*. L'equivalenza materiale  $p \leftrightarrow s$  è *vera* perché entrambe le proposizioni componenti sono *false*.

- **Nota 2**

Il connettivo *xnor* può essere inteso come la negazione della disgiunzione esclusiva *xor*, cioè  $xnor = not\ xor$ .

- **Proprietà**

Siano  $A, B, C$  tre proposizioni logiche. Utilizzando le tavole di verità è possibile verificare le seguenti proprietà.

*Proprietà associativa:*

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C = A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C).$$

*Proprietà commutativa:*  $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$ .

*Proprietà di derivazione:*  $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$ .

Inoltre:

$$A \leftrightarrow B = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B});$$

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A);$$

$$A \leftrightarrow B = \neg(A \dot{\vee} B).$$

### **Negazione della disgiunzione inclusiva (*Nor*).**

Il *nor* è un connettivo derivato binario che fornisce il valore *vero* solo se le due proposizioni hanno valore di verità *falso*, altrimenti fornisce il valore *falso*. Tale connettivo può essere inteso come la negazione della disgiunzione inclusiva *or*, cioè  $nor = not\ or$ .

Siano  $p$  e  $s$  due proposizioni, il *nor* tra  $p$  e  $s$  si denota con:

$$p \downarrow s$$

(si legge:  $p$  *nor*  $s$ ).

Tavola di verità della negazione della disgiunzione inclusiva (*nor*):

$p$	$s$	$p \downarrow s$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- **Proprietà**

Siano A, B, C tre proposizioni logiche. Utilizzando le tavole di verità è possibile verificare le seguenti proprietà.

*Proprietà commutativa:*  $A \downarrow B = B \downarrow A$ .

*Proprietà di derivazione:*  $A \downarrow B = \overline{A \vee B}$ .

- **Nota**

Il connettivo *nor* non gode della proprietà associativa.

### **Negazione della congiunzione (*Nand*).**

Il *nand* è un connettivo derivato binario che fornisce il valore *false* se le due proposizioni hanno valore di verità *vero*, altrimenti fornisce il valore *vero*. Tale connettivo può essere inteso come la negazione della congiunzione *and*, cioè  $nand = not\ and$ .

Siano  $p$  e  $s$  due proposizioni, il *nand* tra  $p$  e  $s$  si denota con:

$$p \uparrow s$$

(si legge:  $p$  *nand*  $s$ ).

Tavola di verità della negazione della congiunzione (*nand*):

$p$	$s$	$p \uparrow s$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

- **Proprietà**

Siano  $A, B, C$  tre proposizioni logiche. Utilizzando le tavole di verità è possibile verificare le seguenti proprietà.

*Proprietà commutativa:*  $A \uparrow B = B \uparrow A$ .

*Proprietà di derivazione:*  $A \uparrow B = \overline{A \wedge B}$ .

- **Nota**

Il connettivo *nand* non gode della proprietà associativa.

## 1.4 PRECEDENZA DEI CONNETTIVI ED USO DELLE PARENTESI

Considerata un'espressione logica, è possibile ridurre al suo interno l'uso delle parentesi, ricorrendo ad un'opportuna convenzione sulla precedenza dei connettivi utilizzati. Tale riduzione risulta opportuna ai fini di una facilitazione della lettura delle espressioni stesse.

Si noti che le convenzioni utilizzate sono svariate, ma le più adatte ai nostri scopi sono le seguenti:

- la *precedenza* è assegnata ai seguenti connettivi con priorità decrescente da sinistra verso destra

$$\neg, \wedge, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow, \downarrow, \uparrow;$$

- l'*associazione implicita*, in assenza di parentesi, è da considerarsi *a destra*.

Quest'ultima affermazione è utile per tutti i connettivi non associativi.

- **Esempi**

$$A \rightarrow B \rightarrow C = A \rightarrow (B \rightarrow C);$$

$$A \vee \neg B \wedge C = A \vee ((\neg B) \wedge C);$$

$$A \wedge \neg B \rightarrow C \wedge \neg A \wedge D = (A \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \wedge ((\neg A) \wedge D)).$$

- **Nota**

Un qualunque connettivo associativo (per es. *and*) può, ovviamente, associare anche a sinistra, senza alterare il senso dell'espressione proposizionale, cioè  $A \wedge B \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ .

Invece, per un connettivo non associativo (per es. *nand*) si ha

$$A \uparrow B \uparrow C = A \uparrow (B \uparrow C) \neq (A \uparrow B) \uparrow C.$$

## 1.5 FORME PROPOSIZIONALI

Si consideri un'espressione logica esemplificativa del tipo  $A \vee B$ . Tale espressione logica (o *proposizione composta*), generalmente, assume diversi valori di verità a seconda di quelli assunti dalle sue proposizioni componenti. Le proposizioni che compongono un'espressione sono definibili come *variabili logiche indipendenti*, mentre l'espressione può essere detta *forma proposizionale*. Si fornisca, ora, una definizione rigorosa di forma proposizionale.

**Definizione di forma proposizionale.** *Si considerino  $n$  proposizioni elementari (variabili indipendenti)  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . Si definisce forma proposizionale di  $n$  variabili ogni espressione logica che lega le variabili utilizzate mediante connettivi di vario tipo.*

Per analizzare una forma proposizionale qualsiasi è necessario

utilizzare una tavola di verità che evidenzia i valori assunti dalle variabili indipendenti, dalle espressioni semplici fino ad arrivare a quelle più complesse presenti nella forma. Si riporta un esempio per chiarire meglio questo metodo analitico.

- **Esempio**

Sia  $E_1 = \overline{A \vee B} \wedge (\overline{A} \wedge B)$ , la relativa tavola di verità è la seguente:

$A$	$B$	$\overline{A}$	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \wedge B$	$E_1$
V	V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	F

## 1.6 TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

Data una forma proposizionale  $E$ , è stato già evidenziato che il suo valore di verità dipende dai valori assunti dalle singole variabili che la compongono. È, però, possibile che tale valore sia sempre *vero* o sempre *falso*, indipendentemente dai valori assunti dalle singole variabili. Per validare quanto affermato è sufficiente analizzare la tavola di verità del paragrafo precedente, nella quale si evidenzia la costante falsità della forma proposizionale a prescindere dai valori assunti dalle variabili componenti.

**Definizione di tautologia.** Sia  $E$  una forma proposizionale di  $n$  variabili indipendenti. Si dice che  $E$  è una tautologia se risulta sempre vera per tutti i possibili valori di verità assegnabili alle  $n$  variabili che la compongono.

**Definizione di contraddizione.** Sia  $E$  una forma proposizionale di  $n$  variabili indipendenti. Si dice che  $E$  è una contraddizione se risulta sempre falsa per tutti i possibili valori di verità assegnabili alle  $n$  variabili che la compongono.

- **Nota**

Si supponga che  $E$  sia una tautologia, si avrà che  $\neg E$  è una contraddizione e viceversa.

## 1.7 FORME PROPOSIZIONALI EQUIVALENTI (O EQUIVERIDICHE)

Si considerino due forme proposizionali,  $E_1$  ed  $E_2$ , dipendenti dalle stesse variabili,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ .

Può accadere che, per ogni ennupla di valori di verità assegnati alle variabili indipendenti, le forme proposizionali assumano valori di verità identici.

**Definizione di forme proposizionali equiveridiche.** Assegnate due forme proposizionali,  $E_1$  ed  $E_2$ , dipendenti dalle stesse



variabili,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , si dice che esse sono equiveridiche se e solo se la coimplicazione materiale  $E_1 \leftrightarrow E_2$  è una tautologia.

Due forme proposizionali  $E_1$  ed  $E_2$  equiveridiche si denotano con:

$$E_1 = E_2 \text{ oppure } E_1 \equiv E_2 .$$

### • Esempi

- 1) Siano  $E_1 = \overline{A \vee B}$  ed  $E_2 = \overline{A} \wedge \overline{B}$ . Si noti la dipendenza di queste due forme proposizionali dalle variabili  $A$  e  $B$ . Ora, l'intento è dimostrare la validità della prima legge di *De Morgan*, giungendo ad affermare che  $E_1$  ed  $E_2$  sono forme proposizionali equiveridiche. Si utilizzino a tal fine le tavole di verità:

$A$	$B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

- 2) Si vuole, ora, dimostrare la validità della seconda legge di *De Morgan*:  $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ .

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

- **Nota**

Analogamente a quanto appena verificato è possibile dimostrare tutte le proprietà di derivazione dei connettivi derivati.

## 1.8 CONNETTIVI *n*-ari

Considerate  $n$  proposizioni, con  $n$  numero naturale, il numero di connettivi *n*-ari capaci di legare le  $n$  proposizioni date è  $2^{2^n}$ . Tale affermazione necessita, ovviamente, di una dimostrazione, che volutamente si tralascia ad altro contesto. Si vuole, invece, ora, considerare la possibilità di esprimere un qualunque connettivo *n*-ario mediante i soli connettivi binari fondamentali: *not*, *and*, *or*.

A tal fine, si riporta un esempio di connettivo 3-ario che lega le proposizioni  $A, B, C$ . Si dica  $X$  tale connettivo e, rappresentandolo mediante una tabella, si attribuiscono ad esso valori casuali di verità.

$A$	$B$	$C$	$X$
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

Si analizzino le righe della tabella: si cercherà di trovare una forma proposizionale dipendente dalle variabili  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , costruita mediante i soli connettivi fondamentali e che abbia come risultato la colonna del connettivo  $X$ . Innanzitutto, si evidenziano le righe che hanno V come risultato del connettivo:

$A$	$B$	$C$	$X$
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Si connettono, poi, riga per riga, le variabili  $A$ ,  $B$  e  $C$  mediante *and*, facendo corrispondere a V la variabile diretta e a F la sua negazione:

I riga:  $A \wedge \bar{B} \wedge C$ ,

II riga:  $\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}$ ,

III riga:  $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C$ .

A questo punto, si connettono le espressioni precedenti mediante *or* e, così facendo, si ottiene il connettivo cercato:

$$X = (A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C).$$

- **Nota**

Per costruire una tabella di verità associata ad una espressione dipendente da  $n$  variabili è utile utilizzare questo metodo pratico:

i valori da attribuire a ciascuna variabile sono  $2^n$ . Alla prima variabile si attribuiscono  $2^{n-1}$  valori consecutivi V e  $2^{n-1}$  valori consecutivi F; alla seconda variabile si attribuiscono  $2^{n-2}$  valori consecutivi V alternandoli con  $2^{n-2}$  valori consecutivi F; alla terza variabile si attribuiscono  $2^{n-3}$  valori consecutivi V alternandoli con  $2^{n-3}$  valori consecutivi F, ..., alla  $n$ -ma variabile si attribuiscono  $2^{n-n}$  valori V (ossia 1 valore) alternandolo con 1 valore F.

## 1.9 ALGEBRA BOOLEANA

Si è già accennato al fatto che un connettivo è una funzione booleana (introdotta da uno dei fondatori della *Logica matematica*: *George Boole*) del tipo:

$$f : \{0; 1\}^n \rightarrow \{0; 1\}, \text{ con } n \text{ numero naturale.}$$

Un insieme sostegno di tipo binario  $\{0; 1\}$  associato ai connettivi fondamentali *not*, *and*, *or* costituisce un'algebra di Boole.

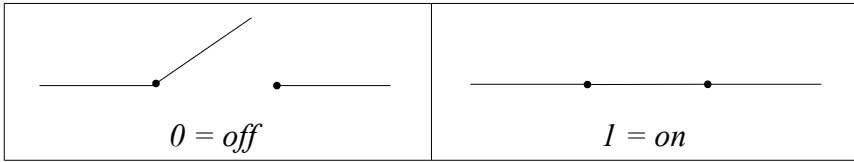
**Definizione di algebra di Boole.** Una struttura algebrica  $(\{0; 1\}, \text{not}, \text{and}, \text{or})$  rappresenta un'algebra di Boole se sono valide le seguenti proprietà:

- proprietà commutativa dell'*and* e dell'*or*;
- proprietà distributiva dell'*and* rispetto all'*or* e dell'*or* rispetto all'*and*;
- esistenza dell'elemento neutro dell'*and* (1) e dell'*or* (0);
- proprietà di complementarietà dei simmetrici:

$$A \text{ and } \bar{A} = 0$$

$$A \text{ or } \bar{A} = 1.$$

Si introduca, ora, l'applicazione ai circuiti digitali delle teorie dell'algebra di *Boole* e dei connettivi fondamentali e derivati, ricordando che il termine *digitale* comprende tutto ciò che è esprimibile mediante cifre (dall'inglese *digit* = cifra). Il valore booleano 0 è solitamente associato al significato di *spento*, *off*, *aperto*, *falso*, *low*, *basso*, mentre il valore booleano 1 è associato ad *acceso*, *on*, *chiuso*, *vero*, *high*, *alto*.



- **Nota**

Può sembrare superfluo, ma vale la pena sottolineare ancora una volta che i valori booleani "0" e "1" non sono da considerarsi numeri, bensì valori di verità (*falso* e *vero*), attribuibili a proposizioni logiche.

Generalmente, nell'algebra di *Boole* i connettivi *or* ed *and* sono rispettivamente denotati con i simboli dell'addizione e della moltiplicazione, pertanto un'espressione del tipo

$$\overline{ABC} + A\overline{B} + \overline{A}$$

assume il seguente significato

$$(not (A and B and C)) or (A and (not B)) or (not A).$$

### 1.9.1 RIDUZIONE DELLE FORME PROPOSIZIONALI

Assegnata una forma proposizionale  $E$ , è possibile che esista una forma proposizionale  $E'$  equiveridica ad  $E$ , espressa mediante un minor numero di connettivi e/o variabili. Una tale espressione  $E'$  si dice *forma ridotta* di  $E$ .

La riduzione di forme proposizionali (o ciò che è lo stesso, funzioni booleane) è estremamente importante per garantire la massima efficienza possibile nel calcolarne i valori assunti. Essa

si ottiene applicando le proprietà dell'algebra di *Boole*, con l'aggiunta di quelle di *De Morgan*, dell'idempotenza e della *proprietà del limite superiore e inferiore*:

- $A + I = I$ ;
- $A \cdot 0 = 0$ , qualunque sia il valore di  $A$ .

- **Esempi**

1) *Proprietà di assorbimento*:

$$A + AB = A(1 + B) = A \cdot 1 = A ;$$

$$A(A + B) = A \cdot A + AB = A + AB = A(1 + B) = A \cdot 1 = A .$$

2) Altro esempio:

$$\begin{aligned} AB + A\bar{B} + \bar{A}B &= A(B + \bar{B}) + \bar{A}B = A \cdot 1 + \bar{A}B = A + \bar{A}B = \\ &= (A + AB) + \bar{A}B = A + AB + \bar{A}B = A + (A + \bar{A})B = \\ &= A + 1 \cdot B = A + B . \end{aligned}$$

- **Nota**

Si riassumano alcune equivalenze utili per la riduzione delle forme proposizionali:

$$A + 0 = A ; A + 1 = 1 ; A + A = A ; A + \bar{A} = 1 ; \bar{\bar{A}} = A ;$$

$$A \cdot 0 = 0 ; A \cdot 1 = A ; A \cdot A = A ; A \cdot \bar{A} = 0 .$$

## 1.9.2 PRINCIPIO DI DUALITÀ

Assegnata un'uguaglianza booleana (cioè un'equivalenza tra due forme proposizionali equiveridiche), si può affermare il seguente

**Principio di dualità.** *Un'uguaglianza booleana permane se si considera la forma duale di ciascun membro dell'uguaglianza.*

La forma duale di una funzione booleana si ottiene sostituendo l'*and* con l'*or* e viceversa e lo *0* con l'*1* e viceversa.

- **Esempio**

Forma diretta	Forma duale
$A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$ <p>Infatti:</p> $= A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot \bar{A} + A \cdot B$ $= 0 + A \cdot B = A \cdot B .$	$A + (\bar{A} \cdot B) = A + B$ <p>Infatti:</p> $= A + (\bar{A} \cdot B)$ $= A \cdot (A + B) + A \cdot \bar{A} + (\bar{A} \cdot B) =$ $= A \cdot (A + B) + \bar{A} \cdot (A + B) =$ $= (A + \bar{A}) \cdot (A + B) =$ $= 1 \cdot (A + B) = A + B .$

- **Nota 1**

La forma duale di una funzione booleana  $f$  non è equivalente ad  $f$ . Il principio di dualità è valido solo per la permanenza delle equivalenze già vere e si applica ad uguaglianze booleane e non a funzioni booleane.

- **Nota 2**

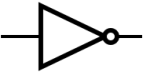






La forma duale della forma duale di una uguaglianza è l'uguaglianza stessa.



### 1.9.3 PORTE E RETI LOGICHE

Si introducono, ora, i simboli utilizzati solitamente nella rappresentazione di circuiti digitali per esprimere i vari connettivi. Si ricordi che le *porte logiche* sono i circuiti digitali minimi necessari per l'elaborazione di un segnale binario.

*Porte logiche:*

 <i>NOT</i>	 <i>AND</i>	 <i>OR</i>	 <i>XOR</i>
	 <i>NAND</i>	 <i>NOR</i>	 <i>XNOR</i>

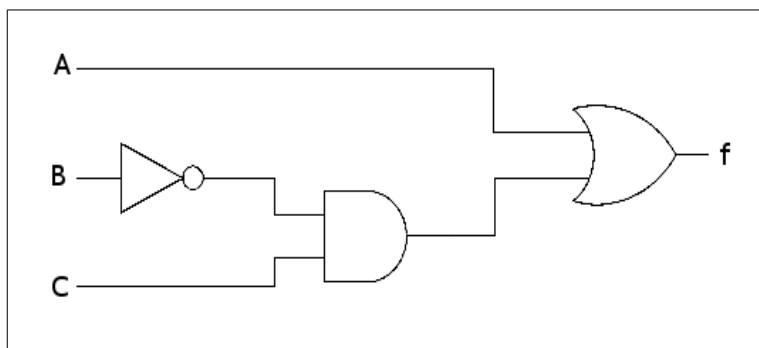
Alla sinistra della porta si trova il valore delle variabili di input e alla destra il valore di output del corrispondente connettivo.

Una qualsiasi funzione booleana può essere rappresentata mediante una *rete logica*, ovvero un percorso, costruito per mezzo di porte logiche interconnesse, che, partendo dalle variabili indipendenti della funzione, giunge sino alla funzione stessa.

- **Esempio**

Si consideri la funzione booleana  $f = A + \overline{B}C$ .

La rappresentazione grafica della relativa rete logica è la seguente:



Si noti come  $f$  sia il risultato del seguente percorso di rete: la proposizione  $B$  viene negata da una porta *not* ( $\overline{B}$ ) e con  $C$  giunge ad una porta *and* ( $\overline{B}C$ ); tale risultato è, poi, connesso ad  $A$  mediante una porta *or*, fino ad ottenere il risultato cercato ( $A + \overline{B}C$ ).

## 1.10 FIGURE DI RAGIONAMENTO O REGOLE DEDUTTIVE

Un *ragionamento* è compiuto ricavando delle affermazioni come conseguenza di alcune premesse, indipendentemente dalle conclusioni tratte, le quali possono o meno essere considerate

accettabili.

Una *figura di ragionamento* o *regola deduttiva* è denotata con il seguente schema formale:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \\ \hline C \end{array} \quad \text{o equivalentemente} \quad P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow C,$$

in cui le  $n$  proposizioni  $P_i$  sono le *premesse* e la proposizione  $C$  è la *conseguenza*.

Una *figura di ragionamento* si definisce *valida* se, partendo da *premesse* tutte *vere*, conduce a *conseguenze vere*. Se una figura di ragionamento è *valida*, allora si ottiene una *conclusione corretta*.

È opportuno sottolineare che una regola deduttiva è valida se e solo se  $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow C$  è una tautologia.

Si analizzano, ora, alcune regole deduttive valide.

### **Modus ponens.**

Dal latino *modus ponendo ponens*, il *modus ponens* è una regola deduttiva valida che segue il seguente schema formale:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}, \quad \text{ossia} \quad ((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B \quad \text{è una tautologia, dove } A \text{ e } B$$

sono due proposizioni.

Si potrebbe enunciare il *modus ponens* come segue:

*Se (A implica B) è vera ed A è vera, allora B è vera.*

Si verifichi la validità di tale regola deduttiva mediante una tavola di verità:

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$((A \rightarrow B) \wedge A)$	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- **Esempio**

$A$ : "Suono",  $B$ : "Mi diverto".

Si supponga vera  $A \rightarrow B$ : "Se suono, mi diverto" e si supponga vera

$A$ : "Suono", allora è vera anche  $B$ : "Mi diverto".

### **Modus tollens.**

Il *modus tollens* è una regola deduttiva valida che segue il seguente schema formale:

$$\frac{A \rightarrow B}{\frac{\overline{B}}{\overline{A}}}, \text{ ossia } ((A \rightarrow B) \wedge \overline{B}) \rightarrow \overline{A} \text{ è una tautologia, dove } A \text{ e } B$$

sono due proposizioni.

Si potrebbe enunciare il *modus tollens* come segue:

*Se (A implica B) è vera e B è falsa, allora A è falsa.*

Si verifichi la validità di tale regola deduttiva mediante una tavola di verità:

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \rightarrow B$	$((A \rightarrow B) \wedge \bar{B})$	$((A \rightarrow B) \wedge \bar{B}) \rightarrow \bar{A}$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

- **Esempio**

$A$ : "Suono",  $B$ : "Mi diverto".

Si supponga vera  $A \rightarrow B$ : "Se suono, mi diverto" e si supponga falsa

$B$ : "Non mi diverto", allora è falsa anche  $A$ : "Non suono".

**Sillogismo ipotetico.**

Il *sillogismo ipotetico* è una regola deduttiva valida che segue il seguente schema formale:

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}, \text{ cioè } ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \text{ è una tautologia,}$$

dove  $A$  e  $B$  sono due proposizioni.

Si potrebbe enunciare il *sillogismo ipotetico* come segue:

Se ( $A$  implica  $B$ ) è vera e ( $B$  implica  $C$ ) è vera, allora ( $A$  implica  $C$ ) è vera.

Si verifichi la validità di tale regola deduttiva mediante una tavola di verità:

$A$	$B$	$C$	$E_1 = A \rightarrow B$	$E_2 = B \rightarrow C$	$E_3 = A \rightarrow C$	$E_1 \wedge E_2$	$(E_1 \wedge E_2) \rightarrow E_3$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

- **Esempio**

$A$ : "Suono",  $B$ : "Mi diverto",  $C$ : "Rido".

Si supponga vera  $A \rightarrow B$ : "Se suono, mi diverto" e si supponga vera

$B \rightarrow C$ : "Se mi diverto, rido", allora è vera anche  $A \rightarrow C$ : "Se suono, rido".

### Sillogismo disgiuntivo.

Il *sillogismo disgiuntivo* (detto anche *modus tollendo ponens*) è una regola deduttiva valida che segue il seguente schema formale:

$$\frac{A \vee B}{\frac{\overline{A}}{B}}, \text{ ossia } ((A \vee B) \wedge \overline{A}) \rightarrow B \text{ è una tautologia, dove } A \text{ e } B$$

sono due proposizioni.

Si potrebbe enunciare il *sillogismo disgiuntivo* come segue:

*Se  $(A \vee B)$  è vera e  $A$  è falsa, allora  $B$  è vera.*

Si verifichi la validità di tale regola deduttiva mediante una tavola di verità:

$A$	$B$	$\bar{A}$	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge \bar{A}$	$((A \vee B) \wedge \bar{A}) \rightarrow B$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

- **Esempio**

$A$ : "Suono",  $B$ : "Canto".

Si supponga vera  $A \vee B$ : "Suono o canto" e si supponga falsa  $A$ : "Non suono", allora è vera  $B$ : "Canto".

### **Prima legge delle inverse o legge contronominale o legge controinversa.**

La *prima legge delle inverse* (o più correttamente *legge contronominale* o *controinversa*) è una regola deduttiva valida che segue il seguente schema formale:

$\frac{A \rightarrow B}{B \rightarrow A}$ , ossia  $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  è una tautologia, dove  $A$  e  $B$

sono due proposizioni.

Si potrebbe enunciare la *prima legge delle inverse* come segue:

*Se (A implica B) è vera, allora (non B implica non A) è vera.*

Si verifichi la validità di tale regola deduttiva mediante una tavola di verità:

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \rightarrow B$	$\bar{B} \rightarrow \bar{A}$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

- **Approfondimento**

A questo punto è opportuno, per rendere il discorso omogeneo, inserire anche la **Seconda legge delle inverse**:

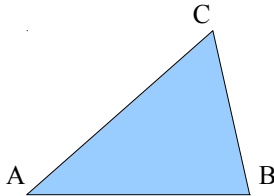
*Se tutte le ipotesi che si possono fare su di un dato soggetto, considerate ad una ad una, conducono ad altrettante tesi, che si escludono a vicenda, allora ciascuna di queste tesi porta, come sua conseguenza necessaria, la corrispondente ipotesi.*

Enunciato alquanto ermetico, che si cercherà di chiarire con un esempio di geometria.

Sia ABC un triangolo qualunque. È noto che, se un lato è maggiore (minore) di un altro, allora al lato maggiore (minore) si oppone



l'angolo maggiore (minore) e che, se un lato è uguale ad un altro, allora gli angoli opposti ad essi sono uguali.



In simboli:

$$\text{se } (\overline{AB} > \overline{BC}) \rightarrow (\hat{C} > \hat{A}),$$

$$\text{se } (\overline{AB} = \overline{BC}) \rightarrow (\hat{C} = \hat{A}),$$

$$\text{se } (\overline{AB} < \overline{BC}) \rightarrow (\hat{C} < \hat{A}).$$

Si noti che le tre ipotesi fatte sui lati  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  del triangolo sono le sole possibili e che conducono a tesi che si escludono a vicenda; pertanto vale la seconda legge delle inverse, dalla quale si evince che ciascuna tesi ha come conseguenza necessaria la sua corrispondente ipotesi. In simboli:

$$\text{se } (\hat{C} > \hat{A}) \rightarrow (\overline{AB} > \overline{BC}),$$

$$\text{se } (\hat{C} = \hat{A}) \rightarrow (\overline{AB} = \overline{BC}),$$

$$\text{se } (\hat{C} < \hat{A}) \rightarrow (\overline{AB} < \overline{BC}).$$

Infatti, se una delle tesi avesse come conseguenza una delle altre due ipotesi (non la propria), si giungerebbe ad una contraddizione, per es.:

se  $(\hat{C} > \hat{A}) \rightarrow (\overline{AB} = \overline{BC})$ , allora  $(\overline{AB} = \overline{BC}) \rightarrow (\hat{C} = \hat{A})$ , ma ciò è assurdo. Analogamente:

se  $(\hat{C} > \hat{A}) \rightarrow (\overline{AB} < \overline{BC})$ , allora  $(\overline{AB} < \overline{BC}) \rightarrow (\hat{C} < \hat{A})$ , ma anche questo risultato è assurdo.

Non resta altro, quindi, che accettare che  $(\hat{C} > \hat{A}) \rightarrow (\overline{AB} > \overline{BC})$ .

## 1.11 FALLACIE O REGOLE DEDUTTIVE NON VALIDE

Nel precedente paragrafo è stato introdotto il concetto generale di regola deduttiva e quello particolare di regola deduttiva valida. Come è facile intuire, non tutte le regole deduttive sono valide. È possibile, cioè, costruire delle figure di ragionamento non valide, che saranno definite *fallacie*.

Si introdurrà, ora, una serie di definizioni, utili per gli argomenti successivi.

Si consideri una qualsiasi implicazione materiale del tipo:

$$A \rightarrow B .$$

Si dirà *termine antecedente* la proposizione  $A$  e *termine conseguente* la proposizione  $B$ .

Si dirà, poi:

$B \rightarrow A$  *implicazione inversa*,

$\bar{A} \rightarrow \bar{B}$  *implicazione contraria*,

$\bar{B} \rightarrow \bar{A}$  *implicazione contronominale*.

Si noti che le implicazioni appena introdotte non sono necessariamente vere, anche se è vera l'implicazione diretta.

Si consideri, ora, una figura di ragionamento che abbia come prima premessa (o *premessa maggiore*) un'implicazione materiale del tipo  $A \rightarrow B$  e come seconda premessa (o *premessa minore*) l'affermazione o la negazione di una delle due proposizioni utilizzate nella premessa maggiore. In tal modo è possibile

costruire alcune regole deduttive. Si analizzino le seguenti:

$$1. \frac{A \rightarrow B}{A} \frac{A}{B}$$

$$2. \frac{A \rightarrow B}{\bar{A}} \frac{\bar{A}}{\bar{B}}$$

$$3. \frac{A \rightarrow B}{B} \frac{B}{A}$$

$$4. \frac{A \rightarrow B}{\bar{B}} \frac{\bar{B}}{\bar{A}}$$

Le regole deduttive 1. e 4. sono *valide* e rappresentano rispettivamente il *modus ponens* e il *modus tollens*, già ampiamente introdotti. Le restanti regole, al contrario, rappresentano delle *fallacie*. La regola 2. (*negazione dell'antecedente*) potrebbe essere espressa come segue:

*se (A implica B) è vera e A è falsa, allora B è falsa.*

Si analizzi la tavola di verità di questa regola deduttiva, per dimostrare che non si tratta di una tautologia e che, pertanto, non è una figura di ragionamento valida.

A	B	$A \rightarrow B$	$((A \rightarrow B) \wedge \bar{A})$	$((A \rightarrow B) \wedge \bar{A}) \rightarrow \bar{B}$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

• **Esempio 1**

A: "Vivo a Nocera Inferiore", B: "Vivo in Campania".

Si supponga vera  $A \rightarrow B$ : "Se vivo a Nocera Inferiore, vivo in

Campania" e si supponga falsa  $A$ : "Non vivo a Nocera Inferiore", allora è falsa anche  $B$ : "Non vivo in Campania" (*fallacia*, potrei anche vivere in Campania, magari a Salerno!).

Si consideri, ora, la regola 3. (*affermazione del conseguente*) e la si esprima come segue:

*se ( $A$  implica  $B$ ) è vera e  $B$  è vera, allora  $A$  è vera.*

Si analizzi la sua tavola di verità e si dimostri che non è una tautologia:

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$((A \rightarrow B) \wedge B)$	$((A \rightarrow B) \wedge B) \rightarrow A$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

### • Esempio 2

$A$ : "Vivo a Nocera Inferiore",  $B$ : "Vivo in Campania".

Si supponga vera  $A \rightarrow B$ : "Se vivo a Nocera Inferiore, vivo in Campania" e si supponga vera  $B$ : "Vivo in Campania", allora è vera anche  $A$ : "Vivo a Nocera Inferiore" (*fallacia*, potrei vivere in Campania e non a Nocera Inferiore, per es. a Napoli!).

Concludendo, è possibile affermare che, in una implicazione materiale, con la *negazione dell'antecedente* o con l'*affermazione del conseguente* nulla si può dire.

## 1.12 IMPLICAZIONE LOGICA E TEOREMA

Siano  $A$  e  $B$  due proposizioni atomiche o composte.

Se da  $A$  si deduce in modo *logico* la proposizione  $B$ , si dice che  $A$  *implica*  $B$  e si scrive:

$$A \Rightarrow B .$$

Un'*implicazione logica* o *deduzione logica* è un ragionamento deduttivo, e non meccanicistico, che dalla *verità* della proposizione antecedente  $A$  conduce alla *verità* della proposizione conseguente  $B$ .

L'implicazione logica è alla base del *teorema*, che può essere proprio schematizzato nella forma:

$$A \Rightarrow B$$

o *se è vera  $A$ , allora è vera  $B$*

o *solo se è vera  $B$ , allora è vera  $A$ .*

- **Nota 1**

È ovvio che se vale  $A \Rightarrow B$ , non è detto che valga il *teorema inverso*

$B \Rightarrow A$ , né il *teorema contrario*  $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ .

La proposizione antecedente  $A$  è stata introdotta come una proposizione atomica o composta. Essa prende il nome di *premessa* o *ipotesi*. Spesso rappresenta la congiunzione di più proposizioni atomiche, necessariamente tutte vere. Questa

puntualizzazione, che può sembrare superflua, è, invece, essenziale, in quanto non ha alcun senso considerare un teorema con ipotesi false. È proprio dalla verità delle ipotesi che, grazie all'implicazione logica, è possibile affermare la verità della proposizione conseguente  $B$ , che prende il nome di *tesi*.

Ai fini della dimostrazione di un teorema e, quindi, per validare l'implicazione logica, è possibile utilizzare due metodi deduttivi:

- ***Metodo diretto***

*Si considera la verità delle ipotesi e mediante ragionamenti logici successivi, tali che ciascuno sia conseguente ai precedenti, uniti all'uso di eventuali postulati e/o altri teoremi già noti, si giunge ad affermare la verità della tesi.*

- ***Metodo indiretto o per assurdo***

*Si nega la validità della tesi (o ciò che è lo stesso, si assume come nuova ipotesi la negazione della tesi) e mediante ragionamenti logici successivi, tali che ciascuno sia conseguente ai precedenti, uniti all'uso di eventuali postulati e/o altri teoremi già noti, si giunge ad un assurdo, cioè ad una affermazione che contraddice l'ipotesi o un postulato o un teorema dimostrato in precedenza.*

- **Nota 2**

Il metodo per assurdo fonda la sua validità sull'equivalenza logica tra il teorema diretto  $A \Rightarrow B$  e il *teorema contronominale*  $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ ; quindi, dimostrando che vale  $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ , allora vale anche  $A \Rightarrow B$  e viceversa.

### 1.13 DIFFERENZA TRA IMPLICAZIONE LOGICA E MATERIALE

Giunti a questo punto, è opportuno sottolineare la differenza concettuale esistente tra la definizione di *implicazione logica* e quella di *implicazione materiale*.

L'implicazione materiale è un connettivo logico derivato binario, come si è potuto già osservare, che restituisce il valore falso solo se la prima proposizione è vera e la seconda è falsa, altrimenti restituisce il valore vero. Un nesso logico (cioè una relazione) tra la proposizione antecedente e quella conseguente non è un requisito essenziale, pertanto è possibile avere anche un'implicazione materiale, nella quale la proposizione conseguente non è *logicamente* conseguente alla proposizione antecedente. Inoltre, l'implicazione materiale, visto che assume valori di verità, costruisce una nuova proposizione e assume valore *vero* anche quando le due proposizioni che la compongono

sono entrambe false. Viceversa, l'implicazione logica non è un connettivo, non costruisce nuove proposizioni, ma, di fatto, è una relazione logica tra la proposizione conseguente e quella antecedente. Ciò detto, è facile intuire che un'implicazione materiale può essere anche un'implicazione logica, a patto che la proposizione conseguente sia anche *logicamente* conseguente alla proposizione antecedente e che entrambe le proposizioni componenti siano vere.

## 1.14 DOPPIA IMPLICAZIONE LOGICA

### O EQUIVALENZA LOGICA

Siano  $A$  e  $B$  due proposizioni elementari o composte.

Si dice che  $A$  *equivale a*  $B$  oppure che  $A$  è *vera se e solo se*  $B$  è *vera* se valgono le seguenti implicazioni logiche  $A \Rightarrow B$  e  $B \Rightarrow A$ .

In simboli si scrive:

$$A \Leftrightarrow B .$$

- **Nota**

La doppia implicazione logica non va confusa con la doppia implicazione materiale. Un analogo ragionamento a quello tenuto nel paragrafo 1.13 a proposito dell'implicazione logica e di quella materiale si estende facilmente al caso della doppia implicazione logica e di quella materiale.



**Teorema 1 (Equivalenza logica tra teorema diretto e teorema contronominale)**

Siano  $A$  e  $B$  due proposizioni atomiche o composte.

Si vuole dimostrare che

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}).$$

In altri termini: *dire  $A \Rightarrow B$  equivale a dire  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ .*

*Dim.*

Si scinda la dimostrazione in due parti.

$\Rightarrow$

Si dimostri prima che  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$ .

Si assuma, quindi, come ipotesi, che  $A \Rightarrow B$  e ci si chieda:  $\bar{B}$  cosa potrebbe implicare? Le possibili risposte sono: o  $A$  o  $\bar{A}$ , cioè la tesi o è falsa o è vera. Per assurdo, si neghi la tesi e si supponga che sia falsa, ossia  $\bar{B} \Rightarrow A$ . Essendo valida l'ipotesi iniziale,  $A$  a sua volta implica  $B$ . Pertanto, si ha  $\bar{B} \Rightarrow A \Rightarrow B$ .

Ciò, tuttavia, è assurdo, in quanto non possono essere contemporaneamente vere  $B$  e  $\bar{B}$ , per il principio di non contraddizione. Non è possibile, quindi, fare altro che accettare la tesi:  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ .

$\Leftarrow$

Si dimostri, ora, che  $(\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ .

Si assuma, per ipotesi, che  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  e, analogamente a quanto già

fatto in precedenza, per assurdo, si neghi la tesi, giungendo ad affermare che  $A \Rightarrow \overline{B}$ . Tale affermazione, congiunta con l'ipotesi assunta, diventa  $A \Rightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$  e ciò è assurdo, ancora una volta, per il principio di non contraddizione, quindi  $A \Rightarrow B$ .



### 1.15 CONDIZIONE NECESSARIA E CONDIZIONE SUFFICIENTE

Siano  $A$  e  $B$  due proposizioni atomiche o composte e sia valido il teorema  $A \Rightarrow B$ .

Si dice che *l'ipotesi  $A$  è condizione sufficiente per la tesi  $B$* , in quanto la sola validità di  $A$  basta per affermare la validità di  $B$ . In altri termini, non necessitano ulteriori ipotesi (oltre  $A$ ) per la verità di  $B$ , quindi  $A$  è sufficiente per  $B$ . Allo stesso tempo, si dice che *la tesi  $B$  è condizione necessaria per l'ipotesi  $A$* , in quanto la validità di  $B$  è *essenziale* per la stessa validità di  $A$ . Infatti, se  $B$  non fosse vera, grazie alla validità del teorema contronominale  $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ , si potrebbe affermare che neanche  $A$  è vera, andando ovviamente contro ipotesi.

Riassumendo:

se  $A \Rightarrow B$ , allora  $A$  è *condizione sufficiente per  $B$*  e  $B$  è *condizione necessaria per  $A$* .

Si supponga, ora, che valga la doppia implicazione logica tra  $A$  e  $B$ , ossia:

$$A \Leftrightarrow B .$$

È lecito affermare che  $A$  è *condizione necessaria e sufficiente per*  $B$  o equivalentemente che  $B$  è *condizione necessaria e sufficiente per*  $A$ .

## 1.16 QUANTIFICATORI

I *quantificatori* sono dei simboli che indicano l'estensione di una proposizione, delimitano, cioè, il campo di applicabilità della proposizione stessa, ovvero, la quantificano. Essi trattano la quantità di elementi ai quali la proposizione si riferisce.

Esistono due tipi di quantificatori, che esprimono rispettivamente *una parte* e *la totalità* del campo di applicabilità della proposizione.

- ***Quantificatore esistenziale***

Il *quantificatore esistenziale* indica la *validità parziale* o *a zone* di una proposizione. Ne denota, cioè, la piena validità, riferendola, però, ad almeno una parte del proprio campo di applicabilità e non necessariamente al campo completo.

Il *quantificatore esistenziale* si indica con  $\exists$  e si legge

"esiste almeno un". Esso manifesta la *necessaria esistenza* di almeno uno degli elementi a cui si riferisce, ma non impedisce l'esistenza di una molteplicità degli stessi. In altri termini:  $\exists x$  significa che *esiste almeno un elemento*  $x$ , ma non è detto che tale  $x$  sia unico.

Si consideri, per esemplificare il concetto, la seguente affermazione:

*A: "Esiste almeno un elemento  $x$  tale che  $x$  verifichi la proprietà  $P$ ".*

In simboli:  $\exists x : P$ .

La proposizione  $A$  è una proposizione logica? È possibile attribuire ad essa dei valori di verità? È *vera* o *falsa*?

Per rispondere a queste domande è necessario, innanzitutto, chiarire che la proprietà  $P$ , cui si fa riferimento nella proposizione  $A$ , non sempre è vera, in quanto esiste un campo di applicabilità, al di là del quale,  $P$  non è detto che valga. Ciò detto, bisogna chiarire quale sia il campo di applicabilità di  $P$ , ovvero quale sia l'*ambiente* (o, meglio, *universo*) in cui è possibile ritrovare l'elemento  $x$  che verifica la proprietà  $P$ . Si supponga, per es., che tale universo sia  $\mathbb{N}$ , l'insieme dei numeri naturali ( $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ), la proposizione  $A$  diventa:

*"Esiste almeno un elemento naturale  $x$  tale che  $x$  verifichi*

*la proprietà P".*

In simboli:  $\exists x \in \mathbb{N} : P$ .

La proposizione  $A$  assumerà valore di verità *vero* solo se  $P$ , riferita ad almeno un elemento naturale  $x$ , è vera. Se  $P$  fosse vera, ma solo in relazione a qualche  $x$  non naturale, allora  $A$  sarebbe *falsa*. Questo fa capire che  $A$  non assume una verità assoluta, ma sarà vera in alcuni casi e falsa in altri. A differenza dei connettivi, i quantificatori, quindi, non permettono la costruzione diretta di semplici tavole di verità.

Una variante del quantificatore esistenziale è, poi, denotata con  $\exists!$ . Tale simbologia si legge: "esiste uno ed un solo" ed evidenzia, oltre all'esistenza di un elemento, anche la sua unicità. È ovvio che questo nuovo quantificatore riduce la applicabilità di una proposizione sino a farla valere per *un unico* elemento.

- ***Quantificatore universale***

Il *quantificatore universale* indica la *validità totale* di una proposizione. Ne denota, cioè, la validità, riferendola all'intero campo di applicabilità.

Il suo uso improprio è, spesso, causa di un'errata interpretazione di enunciati e definizioni; è bene, quindi, chiarire il corretto utilizzo di tale quantificatore,

evidenziando la sua opportuna collocazione all'interno di una proposizione.

Si denota con  $\forall$  e si legge "Fissato un", "Preso un", "Per ogni fissato" se viene collocato come premessa in una proposizione, cioè all'inizio della proposizione, in modo che la proprietà seguente sia dipendente da ciò che si è *preposto*. Si legge, invece, "Per ogni", "Qualunque sia" se viene collocato alla fine della proposizione, evidenziando la indipendenza della proprietà da ciò che si è *posposto*.

- **Esempio**

Siano  $T$  un intervallo di tempo e  $t$  un generico istante appartenente a tale intervallo. Siano, inoltre,  $A$  e  $B$  due corpi che si muovono con velocità rispettive  $\bar{v}_A$  e  $\bar{v}_B$ .

Si considerino le seguenti proposizioni apparentemente equivalenti:

1)  $\forall t \in T, \bar{v}_A = \bar{v}_B$  ;

2)  $\bar{v}_A = \bar{v}_B, \forall t \in T$ .

Inizialmente sembra quasi che le due proposizioni, appena enunciate, abbiano lo stesso significato. Si analizzino attentamente.

Nella proposizione 1) il quantificatore universale è *preposto* alla proprietà  $\bar{v}_A = \bar{v}_B$ , che verrà chiamata proprietà  $P$ , pertanto si legge "*Per ogni fissato istante di tempo  $t$  appartenente all'intervallo  $T$ , i corpi  $A$  e  $B$  hanno la stessa velocità vettoriale*". In altri termini, *istante per istante*, la velocità vettoriale di  $A$  è uguale alla velocità

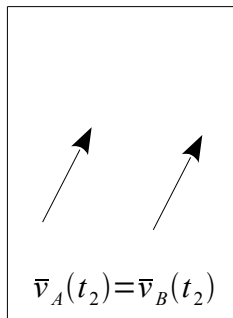
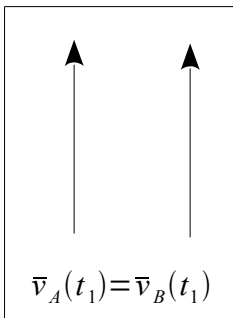
vettoriale di  $B$ . Ciò, però, non garantisce che la velocità rimanga costante durante tutto l'intervallo di tempo  $T$ . Infatti, fissato un istante  $t_1$ , si ha  $\bar{v}_A(t_1) = \bar{v}_B(t_1)$ , fissato un istante  $t_2$ , si ha  $\bar{v}_A(t_2) = \bar{v}_B(t_2)$  e così via, per ogni istante di tempo che si fissa. Una relazione implicita tra le differenti manifestazioni della proprietà  $P$ , nei diversi istanti considerati, non esiste o, quantomeno, non è dichiarata nella proposizione 1).

Dalla proposizione 1) non si evince che

$$\bar{v}_A(t_1) = \bar{v}_A(t_2) = \bar{v}_A(t_3) = \dots \text{ e}$$

$\bar{v}_B(t_1) = \bar{v}_B(t_2) = \bar{v}_B(t_3) = \dots$ , dunque, le velocità dei corpi  $A$  e  $B$  possono variare istante per istante, perché l'unica condizione che deve essere rispettata è che, istante per istante, valga  $P$ , ossia:  $\bar{v}_A = \bar{v}_B$ .

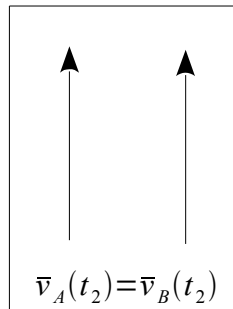
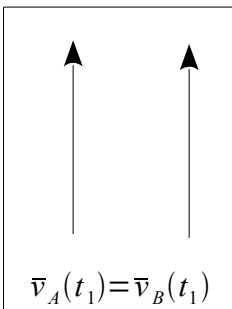
Per fissare istanti è utile *fotografare* più volte l'evento, che, per i nostri scopi, sarà rappresentato dalle figure seguenti, nelle quali è evidenziata, istante per istante, la variazione dei moduli e delle direzioni dei vettori  $\bar{v}_A$  e  $\bar{v}_B$ , pur conservando la validità di  $P$ .



Nella proposizione 2) il quantificatore universale è *postposto* alla proprietà  $P$ :  $\bar{v}_A = \bar{v}_B$ . Tale collocazione evidenzia che la proprietà  $P$  non dipende dal tempo, pertanto si legge *"I corpi A e B hanno la stessa velocità vettoriale per ogni istante di tempo t appartenente all'intervallo T"*. In altri termini, la velocità vettoriale di  $A$  è uguale alla velocità vettoriale di  $B$ , qualunque sia l'istante  $t$ , indipendentemente dal tempo (sempre nell'intervallo  $T$ ). Questo garantisce che i corpi, oltre ad avere la stessa velocità, viaggino a velocità vettoriale costante durante tutto l'intervallo di tempo  $T$ , indipendentemente dall'istante che si fissa. Ciò si traduce in un moto rettilineo uniforme, durante il quale il modulo, la direzione, il verso delle due velocità non possono modificarsi, istante per istante. Pertanto, si ha

$$\bar{v}_A(t_1) = \bar{v}_A(t_2) = \bar{v}_A(t_3) = \dots = \bar{v}_B(t_1) = \bar{v}_B(t_2) = \bar{v}_B(t_3) = \dots$$

Ora, si fissino diversi istanti e si fotografi l'evento, rappresentandolo nelle figure seguenti e mostrando, allo stesso tempo, la validità di  $P$  e l'invarianza vettoriale, istante per istante, delle velocità.





## 1.16.1 PROPRIETÀ DEI QUANTIFICATORI

### *Equivalenze con negazione.*

I quantificatori esistenziali ed universali risultano strettamente correlati mediante la negazione. Si elencano alcune equivalenze fondamentali:

1.  $(P, \forall x) \equiv (\neg(\exists x : \neg P))$  ossia:  
*dire che una proprietà  $P$  vale per ogni  $x$  equivale a dire che è falso che esiste almeno un  $x$  per cui  $P$  non vale.*
2.  $(\neg(P, \forall x)) \equiv (\exists x : \neg P)$  ossia:  
*dire che è falso che una proprietà  $P$  vale per ogni  $x$  equivale a dire che esiste almeno un  $x$  per cui  $P$  non vale.*
3.  $(\exists x : P) \equiv (\neg(\neg P, \forall x))$  ossia:  
*dire che esiste almeno un  $x$  per cui vale  $P$  equivale a dire che è falso che non vale  $P$  qualunque sia  $x$ .*
4.  $(\neg P, \forall x) \equiv (\neg(\exists x : P))$  ossia:  
*dire che una proprietà  $P$  non vale qualunque sia  $x$  equivale a dire che è falso che esiste almeno un  $x$  per cui  $P$  vale.*

- **Esempi**

- 1) "Tutti i cani sono mammiferi" *equivale a* "Non è vero che esiste almeno un cane che non è un mammifero".
- 2) "Non è vero che tutti i mammiferi sono cani" *equivale a* "Esiste almeno un mammifero che non è un cane".

- 3) "Esiste almeno un cane che è bianco" *equivale a* "Non è vero che tutti i cani non sono bianchi".
- 4) "Tutti i cani non sono ovipari" *equivale a* "Non è vero che esiste almeno un cane che è oviparo".

### ***Equivalenze e implicazioni con congiunzione e disgiunzione inclusiva.***

1.  $(\exists x : A \wedge B) \Rightarrow (\exists x : A) \wedge (\exists x : B)$  ossia:  
*se esiste almeno un  $x$  tale che valgano  $A$  e  $B$ , allora esiste almeno un  $x$  tale che valga  $A$  ed almeno un  $x$  (non necessariamente lo stesso) tale che valga  $B$ . Non vale l'inverso.*
2.  $(A \wedge B, \forall x) \equiv (A, \forall x) \wedge (B, \forall x)$  ossia:  
*dire che valgono  $A$  e  $B$  qualunque sia  $x$  equivale a dire che vale  $A$  qualunque sia  $x$  e che vale  $B$  qualunque sia  $x$ .*
3.  $(\exists x : A \vee B) \equiv (\exists x : A) \vee (\exists x : B)$  ossia:  
*dire che esiste almeno un  $x$  tale che valga  $A$  o  $B$  equivale a dire che esiste almeno un  $x$  tale che valga  $A$  o che esiste almeno un  $x$  (non necessariamente lo stesso) tale che valga  $B$ .*
4.  $(A, \forall x) \vee (B, \forall x) \Rightarrow (A \vee B, \forall x)$  ossia:  
*se vale  $A$  qualunque sia  $x$  o vale  $B$  qualunque sia  $x$ , allora vale  $A$  o  $B$  qualunque sia  $x$ . Non vale l'inverso.*

## 1.17 PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

Finora sono state introdotte alcune regole deduttive, capaci di determinare leggi particolari da princìpi generali. Al contrario, ora, si introduce l'*induzione* che, come sosteneva *Aristotele*, rappresenta «il procedimento che dal particolare porta all'universale».

Tantissime critiche, nel corso dei secoli, sono state mosse nei confronti del metodo induttivo, ritenuto a volte «un semplice ampliamento dell'intuizione» (*Platone*), altre «una osservazione a posteriori che da sola non dimostra alcunché» (*Aristotele*). Nella concezione moderna, il metodo induttivo ha assunto il significato di una «regola ampliativa probabile», come *David Hume* ha evidenziato, affermando che le leggi scientifiche, ritenute giustificabili induttivamente su una base empirica, in effetti, hanno solo un'origine soggettiva e che la previsione di un evento può essere considerata solo probabile e mai certa.

Secondo questa concezione, un possibile esempio di induzione è il seguente:

1. Ho visto un primo cane a 4 zampe.
2. Ho visto un secondo cane a 4 zampe.
3. Ho visto un terzo cane a 4 zampe.

...

*Conclusione induttiva*: Tutti i cani che vedrò *probabilmente*

saranno a 4 zampe.

Oppure: il prossimo cane che vedrò sarà *probabilmente* a 4 zampe.

La visione probabilistica dell'induzione ha certamente una coerenza logica maggiore rispetto alle sue precedenti accezioni, ma l'intento da raggiungere è quello di enunciare un principio di induzione che, al di là delle possibili variazioni accettive, dia una visione certa dell'argomento e la possibilità di applicarlo ai fini di ricavare leggi matematiche universali. Ci si allontani da quella che può essere, dunque, un'analisi più strettamente filosofica dell'induzione e si introduca il seguente principio.

### ***Principio di induzione matematica.***

*Si considerino infinite proposizioni, caratterizzate da un pedice destro naturale che le contraddistingue:  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ .*

*Si fissi un pedice destro naturale  $j$  a cui corrisponde la proposizione  $P_j$ .*

$$\left[ \begin{array}{l} 1. P_j \text{ è vera} \\ 2. \forall n \in N, n \geq j, P_n \text{ vera} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vera} \end{array} \right] \Rightarrow P_n \text{ è vera, } \forall n \geq j.$$

La prima ipotesi induttiva (detta *base dell'induzione*) garantisce la

validità di almeno una proposizione  $P_j$ . La seconda ipotesi induttiva (detta *passo dell'induzione*) assicura che, fissato un pedice destro naturale  $n$  maggiore o uguale a  $j$ , la proposizione  $P_n$  vera implichi che la proposizione  $P_{n+1}$  sia vera. Date queste due ipotesi, è possibile affermare la tesi

*$P_n$  è vera, qualunque sia  $n \geq j$ , ovviamente naturale.*

*Dim.*

Si ragioni per assurdo, negando la tesi. Si ipotizzi, cioè, che esista almeno un pedice destro naturale  $n \geq j$  per il quale  $P_n$  risulti falsa.

In simboli:  $\exists n \geq j : P_n \text{ è falsa}$ . Si noti che questa nuova ipotesi assunta permette che esistano anche molteplici valori di  $n \geq j$ , per i quali  $P_n$  risulti falsa. Si raccolgano, in tal caso, tutti gli eventuali pedici per i quali  $P_n$  risulti falsa e si permutino le proposizioni  $P_n$ , in modo che prima di  $n$  (cioè fino alla posizione  $n$  esclusa) figurino tutte le proposizioni  $P_n$  vere e da  $n$  in poi tutte quelle false.

Detto ciò, scelto il valore  $n-1 \geq j$ , per il quale ancora vale  $P_{n-1}$  vera, dalla seconda ipotesi induttiva si evince che anche la successiva proposizione  $P_n$  è vera. Ma la negazione della tesi ha reso  $P_n$  falsa, pertanto,  $P_n$  è vera e falsa allo stesso tempo e ciò

è assurdo per il principio di non contraddizione. Dunque, la tesi non può essere negata e deve necessariamente essere accettata, pertanto  $P_n$  è vera,  $\forall n \geq j$ .



- **Nota 1**

Nel caso particolare di  $j=1$  il principio di induzione si presenta nella forma:

$$\left[ \begin{array}{l} 1. P_1 \text{ è vera} \\ 2. \forall n \in N, P_n \text{ vera} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vera} \end{array} \right] \Rightarrow P_n \text{ è vera, } \forall n \in N.$$

- **Nota 2**

La validità di una proprietà, mediante il principio di induzione, si dimostra con i seguenti passi:

- 1) si verifica la validità della proprietà per  $n=1$  (o in generale per  $n=j$ );
- 2) si considera un generico  $n$  (in generale  $n \geq j$ ) e si assume che la proprietà valga per  $n$  (*ipotesi d'induzione*);
- 3) si dimostra che la proprietà vale per  $n+1$  utilizzando l'ipotesi d'induzione.

- **Esempio**

Si vuole dimostrare, per induzione, la validità della seguente proprietà

$P_n$  :

La somma dei primi  $n$  numeri naturali è

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Dim.*

*Passo 1.* Si consideri la base dell'induzione:

per  $n=1$  si ha  $S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ,  $P_1$  è vera.

*Passo 2.* Si consideri, ora, l'ipotesi d'induzione: si fissi un generico  $n$  e si supponga che  $P_n$  sia valida, ossia che, per questo fissato  $n$ , valga

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Passo 3.* Ora è necessario dimostrare che vale anche  $P_{n+1}$ , mediante  $P_n$ .

Si calcoli, a tal fine,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}, \end{aligned}$$

$P_{n+1}$  vale.

Dal momento che sono validi la *base* e il *passo dell'induzione*, si deduce che  $P_n$  vale qualunque sia  $n \in \mathbb{N}$ .

• **Curiosità 1**

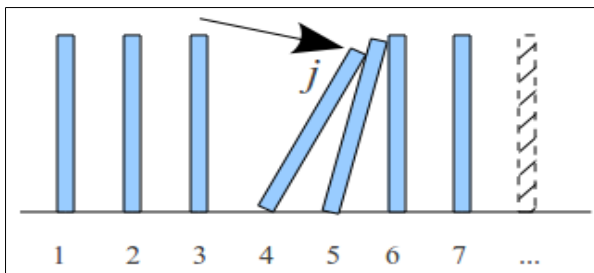
*Il principio d'induzione e l'effetto domino.*

È interessante considerare un esempio, alquanto insolito, per meglio comprendere il significato del principio di induzione. L'idea è quella di associare le proposizioni  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$  alle infinite tessere di un domino costruito su una retta, ciascuna tessera numerata, tenendo conto della propria posizione. Le tessere siano posizionate in modo tale che la distanza costante tra due tessere successive sia sempre minore dell'altezza di ogni tessera.

I passi del principio d'induzione possono essere associati ai seguenti eventi:

- 1) la tessera di posizione  $j$  cade;
- 2) considerata una tessera qualunque nella posizione  $n \geq j$ , essa è collocata in modo che, cadendo, provoca la caduta della tessera successiva.

Se accadono gli eventi suddetti, allora si manifesta un inarrestabile *effetto domino*, cioè tutte le tessere dalla posizione  $j$  in poi cadranno inevitabilmente. La figura seguente mostra quanto or ora affermato.





- **Curiosità 2**

*Il tacchino induttivista.*

Un esempio ideato da *Bertrand Russell*, che ha confutato la validità delle regole induttive per enumerazione, tipiche della tradizione empirica, è quello del *tacchino induttivista*.

Un tacchino americano, nutrito da un allevatore statunitense con regolarità quotidiana, decide di crearsi una visione scientifica del mondo e comincia, così, ad osservare ogni particolare che lo circonda. Al mattino del primo giorno di analisi si sveglia e, alle nove in punto, il cibo è servito. Al mattino del secondo giorno il tacchino si sveglia e, alle nove in punto, il cibo è servito. Al terzo giorno analoga situazione. Il cibo viene servito tutti i giorni alle nove in punto, giorno dopo giorno, indipendentemente dai giorni della settimana e dalle condizioni meteorologiche. Il tacchino, dopo una lunga ed accurata analisi, da buon induttivista, decide di trarre delle conclusioni: domani il cibo sarà servito alle nove in punto.

Ma, all'indomani, il quarto giovedì del mese di Novembre, è il giorno del ringraziamento...



## INDICE ANALITICO

- accesso* 27  
*affermazione del conseguente* 42  
*algebra booleana* 26-29  
*alto* 27  
*ambiente* 50  
*and* 4, 7-8, 20, 24-25, 27-28, 30-32  
*aperto* 27  
*associazione implicita* 19  
*base dell'induzione* 58, 61  
*basso* 27  
*Boole (algebra di)* 26-29  
*chiuso* 27  
*coimplicazione* 6, 14-15, 23  
*conclusione 1*, 32-33, 57, 63  
*conclusione corretta* 33  
*condizione necessaria* 48  
*condizione necessaria e sufficiente* 49  
*condizione sufficiente* 48  
*coniunzione* 4, 6-8, 10, 43, 56  
*connettivo 3-8*, 10-12, 14, 16-20, 24-28, 31, 45-46, 51  
*connettivo binario 4-8*, 10, 12, 14, 16-17, 24, 45  
*connettivo derivato* 4, 10, 12, 14, 16-17, 24, 27, 45  
*connettivo fondamentale* 4, 6-8, 24-25, 27  
*connettivo n-ario 4-5*, 24  
*connettivo unario 4-6*  
*conseguenza* 32-33, 38-39  
*contraddizione* 3, 21-22, 39  
*deduzione logica* 43  
*digitale* 27, 31  
*dimostrazione 1*, 24, 44, 47  
*disgiunzione esclusiva* 4, 6, 10-12  
*disgiunzione inclusiva* 4, 6, 8-11, 56  
*doppia implicazione logica* 46, 49  
*doppia implicazione materiale* 4, 14-15, 46  
*equivalenza 14-15*, 22, 29-30  
*equivalenza (con congiunzione e disgiunzione inclusiva)* 56  
*equivalenza (con negazione)* 55  
*equivalenza logica 45-47*  
*equivalenza materiale 14-15*  
*fallacia* 40-42  
*falso 2-3*, 5-10, 12, 14-17, 21-22, 27-28, 35, 37, 41-42, 44-47, 50-51, 55, 59  
*figura di ragionamento* 33, 40-41  
*figura di ragionamento valida* 33, 41  
*forma duale* 30  
*forma proposizionale* 20-23, 25, 28-29  
*forma proposizionale equivalente* 22-23, 30  
*forma proposizionale equiveridica* 22-23, 28-29  
*forma ridotta* 28  
*funzione booleana* 5, 26, 28, 30-32  
*high* 27  
*implicazione (con congiunzione e disgiunzione inclusiva)* 56  
*implicazione contraria* 40  
*implicazione contronominale* 40  
*implicazione inversa* 40  
*implicazione logica* 43-46  
*implicazione logica e materiale (differenza)* 45-46  
*implicazione materiale 4, 6, 12-14, 40, 42, 45-46*  
*induzione 1*, 57-63  
*ipotesi 1*, 38-39, 43-44, 47-48, 58-61  
*ipotesi d'induzione* 58-61  
*legge controinversa* 37  
*legge contronominale* 37  
*legge delle inverse, prima* 37-38  
*legge delle inverse, seconda* 38-39  
*legge di De Morgan* 10, 23, 29  
*legge di De Morgan (variazione)* 10  
*logica 1-2*, 26  
*logica deduttiva 1*  
*logica induttiva 1*, 57-63  
*low* 27  
*metodo diretto* 44  
*metodo indiretto* 44  
*metodo per assurdo* 44-45, 47-48, 59  
*modus ponens* 33-34, 41  
*modus tollens* 34-35, 41  
*nand* 4, 17-18, 20, 31  
*negazione 3-7*, 16-18, 25, 40-42, 44, 55, 59  
*negazione dell'antecedente* 41-42  
*negazione della congiunzione* 6, 17-18, 31  
*negazione della disgiunzione esclusiva* 4, 14-16, 31  
*negazione della disgiunzione inclusiva* 4, 6, 16-17, 31

- nor* 4, 6, 16-17, 31  
*not* 3-4, 6-7, 16, 18, 24, 27-28, 31-32  
*off* 27-28  
*on* 27-28  
*operazione tra proposizioni* 3  
*or* 4, 8-9, 11-12, 16, 24, 26-28, 31-32, 37  
*passo dell'induzione* 59, 61  
*porta logica* 31-32  
*precedenza dei connettivi* 19  
*premessa* 1, 32-33, 40, 43, 52  
*premessa maggiore* 40  
*premessa minore* 40  
*principio del terzo escluso* 3  
*principio di dualità* 29-30  
*principio di identità* 2  
*principio di induzione matematica* 57-58, 60, 62  
*principio di non contraddizione* 2-3, 47-48, 60  
*proposizione atomica* 2, 43, 47-48  
*proposizione composta* 20, 43, 46-48  
*proposizione elementare* 2-3, 13, 20, 46  
*proprietà associativa* 8-9, 12, 14, 16-18  
*proprietà commutativa* 8-9, 12, 14, 16-18, 27  
*proprietà dei quantificatori* 55-56  
*proprietà del limite superiore e inferiore* 29  
*proprietà dell'assorbimento* 10, 29  
*proprietà dell'esistenza dell'elemento neutro* 27  
*proprietà dell'idempotenza* 8, 9  
*proprietà di complementarietà dei simmetrici* 27  
*proprietà di derivazione* 12, 14, 16-18, 24  
*proprietà distributiva* 10, 12, 27  
*quantificatore* 49-56  
*quantificatore esistenziale* 49-51, 55  
*quantificatore universale* 51-56  
*ragionamento* 1, 32-33, 40-41, 43-44, 46  
*regola deduttiva* 33-38, 40-41  
*regola deduttiva non valida* 40-41  
*rete logica* 31-32  
*riduzione delle forme proposizionali* 28-29  
*se e solo se* 4, 14-15, 23, 33, 46  
*se...allora* 4, 13, 34-39, 41-43, 56  
*sillogismo disgiuntivo* 36-37  
*sillogismo ipotetico* 35  
*spento* 27  
*tacchino induttivista* 63  
*tautologia* 21-23, 33-36, 38, 41-42  
*tavola di verità* 7-10, 12-13, 15-18, 21, 23, 26, 34-38, 41-42, 51  
*teorema* 1, 43-45, 47-48  
*teorema* 1 (equivalenza logica tra teorema diretto e teorema contronominale) 47-48  
*teorema contrario* 43  
*teorema contronominale* 45, 47-48  
*teorema diretto* 45, 47  
*teorema inverso* 43  
*termine antecedente* 40-43, 45-46  
*termine conseguente* 40, 42-46  
*tesi* 1, 38-39, 44, 47-48, 59-60  
*universo* 50  
*variabile logica indipendente* 20-22, 31  
*vero* 2-3, 5-7, 9-10, 12-18, 21-22, 27-28, 33-38, 41-43, 45-48, 50-51, 55-56, 58-61  
*xnor* 4, 14-16, 31  
*xor* 4, 10-12, 16, 31.









**Analitic@Mente**

Collana di Analisi Matematica



Centro Studi Medea